Antonio Iannizzotto

I *Manoscritti Matematici* di Karl Marx[1]

Si può datare al 1858 il primo incontro significativo fra Karl Marx, un filosofo ed economista fermamente intenzionato a conferire al proprio pensiero un carattere strettamente "scientifico", e la matematica, che proprio nel diciannovesimo secolo consolida il proprio ruolo di "grammatica" delle scienze tutte. L'occasione dell'incontro è duplice, e sembra rimandare alla dicotomia, o alla complementarità, fra i due aspetti (applicativo e puro) di questa disciplina: da una parte, infatti, l'urgenza di approfondire le sue conoscenze in fatto di numeri e calcoli viene a Marx dai problemi posti dalla teoria economica di cui si sta occupando proprio in quel periodo; dall'altra, la sua curiosità è alimentata dalla critica formale dell'analisi matematica svolta da Hegel nella *Scienza della Logica*. Negli anni successivi, l'interesse di Marx per la matematica, coltivato anche a scopo ricreativo, si sposta decisamente sul versante "puro", teoretico, sfociando in uno studio sistematico condotto negli ultimi anni (1878-1882) della vita del filosofo di Treviri.

Il frutto delle speculazioni di quegli anni è raccolto in alcuni quaderni di appunti, pubblicati dapprima in Unione Sovietica (1968), quindi in diversi Paesi occidentali: per quanto riguarda l'Italia, questo volume, tradotto e curato da Augusto Ponzio, segue e amplia una precedente edizione curata dallo stesso Ponzio e da Francesco Matarrese[2]; esso contiene essenzialmente gli studi di Marx sul calcolo differenziale, che, lungi dal costituire un'opera organica, presentano tuttavia numerosi spunti interessanti non solo per gli studiosi del pensiero dell'autore tedesco, bensì anche per chiunque avverta la necessità di un dialogo più fitto fra la cultura umanistica e la scientifica.

Difatti, a differenza dai curatori dell'edizione sovietica che (più marxisti di Marx?) nella presentazione dei *Manoscritti* sostenevano la completa dipendenza dell'interesse dell'autore per la matematica dalle applicazioni in economia, Ponzio, nella sua stimolante introduzione al testo, mette in grande risalto anche un altro aspetto del lavoro, chiarendone i lineamenti fondamentali e le connessioni con il retroterra filosofico di Marx (principalmente, la dialettica hegeliana e la netta posizione anti-metafisica): questa parte dei *Manoscritti* costituisce uno studio, abbozzato ma tutt'altro che superficiale, degli aspetti logico-formali del calcolo differenziale e della sua storia, con un particolare accento su quello che i matematici chiamano "problema fondazionale". Con questa locuzione s'intende il problema di stabilire, per una branca della matematica o per la disciplina nel suo complesso, un armamentario di nozioni basilari, definizioni e postulati, coerente e inattaccabile dal punto di vista logico (privo, cioè, di quelle implicite contraddizioni che talvolta si celano nei costrutti di pensiero compromettendone il connotato di "certezza", che di tali costrutti è il principale valore); su tali solide basi, poi, si edificherà una teoria organica.

In breve, il calcolo differenziale è una parte dell'analisi matematica che tenta di dedurre, dalle proprietà *puntuali* di una funzione, informazioni sul comportamento *locale* della stessa. Forse non nuocerà essere un poco didascalici su questo tema: una *funzione*, per i matematici, è (grosso modo) una legge che associa ai valori di una variabile

---

[1] A proposito di **Karl Marx, *Manoscritti Matematici*, edizione critica a cura di Augusto Ponzio , Spirali, Milano 2005**

[2] *Manoscritti matematici* (Dedalo, Bari 1975).

indipendente, chiamiamola x, valori corrispondenti di una variabile dipendente, chiamiamola y, valori che denotiamo $y(x)$ (per esempio, la funzione quadratica associa a ogni numero x il numero $y(x)=x^2$). La legge, dunque, individua un singolo valore da dare a y per ogni arbitrario valore assegnato a x, ma non ci informa direttamente sui valori che y assumerà in corrispondenza di valori di x "prossimi" a quello dato. Per completare la nostra conoscenza della situazione, senza esser costretti a calcolare innumerevoli altri valori di y, si ricorre al calcolo della *derivata*, che si indica con $y'(x)$ ed esprime l'"andamento" della funzione nelle immediate vicinanze di x: per esempio, per x=1 sia la funzione quadratica $y(x)=x^2$ che la cubica $y(x)=x^3$ hanno valore 1, ma nel primo caso si ha $y'(x)$=2, nel secondo $y'(x)$=3, e ciò indica che, spostandoci da x=1 a valori poco più grandi, vedremo i valori della funzione cubica crescere "più rapidamente" di quelli della funzione quadratica. Così una proprietà puntuale (la derivata) fornisce informazioni sul comportamento locale della funzione. Per intenderci: conoscere, oltre al valore, la derivata di una funzione in un punto è un po' come conoscere, oltre alla posizione di un'automobile in un certo istante, anche la sua velocità.

Senza volerci qui dilungare sugli aspetti algebrici della questione, notiamo solo come, alla base del concetto di derivata, vi sia l'idea di aumentare il valore della variabile indipendente, diciamo da x a $x+h$, e quindi di studiare il comportamento del rapporto fra le quantità $y(x+h)-y(x)$ e $(x+h)-(x)$, cioè h, allorché h è prossimo a zero, ossia $x+h$ "ritorna" a x: è questo, per un pensatore influenzato dalla tradizione hegeliana, quale Marx era, uno schema logico fin troppo familiare, quello della triade dialettica. Si parte da un valore (tesi), lo si altera o dialetticamente lo si "nega" (antitesi), quindi si nega la negazione e il risultato (sintesi) non è un mero ritorno alla tesi: la conoscenza della derivata arricchisce il mero dato della tesi, lo mette in relazione con gli altri valori precedenti e successivi, rendendolo dinamico, o in qualche modo "storico". Ponzio ci informa che Engels (destinatario di parte dei Manoscritti), in séguito, scriverà che il calcolo differenziale è "l'applicazione della dialettica ai rapporti matematici".

Forte di questa intuizione, Marx esamina la storia del calcolo differenziale dalle sue origini, risalendo cioè agli scritti di Newton e Leibniz nei quali questo metodo comparve per la prima volta: occorre rilevare che, per questi autori, si trattava di un espediente algebrico finalizzato alla risoluzione di problemi geometrici, primo fra tutti quello di tracciare la retta tangente a una curva in un punto, ed è questa la ragione per cui tanto Newton che Leibniz non avvertirono l'esigenza di uno statuto formale del tutto rigoroso per il calcolo differenziale. Data la natura "vicaria" del calcolo rispetto alla geometria, si potevano in esso tollerare delle imprecisioni, compensate dall'intuizione geometrica, come quella relativa al rapporto fra due grandezze che "svaniscono": rispettivamente $y(x+h)-y(x)$ e h, quando h "tende a zero". Compariva un celebre paradosso matematico, quello della divisione di zero per zero (operazione illecita in matematica), e l'uso di espressioni approssimative come "svanire" o "divenire trascurabili" non bastava certo a chiarire la natura di quantità che, pur essendo diverse da zero, risultano più piccole di qualunque quantità positiva: i cosiddetti *infinitesimi*[3].

Quasi un secolo dopo (e in mezzo si situano gli enormi sviluppi dell'epoca di Eulero e dei Bernoulli), fu D'Alembert a fare giustizia, con una chiarezza e una brutalità tutte illuministiche, delle poetiche imprecisioni del calcolo differenziale "primitivo": "una quantità o è qualcosa o è niente, supporre che vi sia uno stato intermedio è una pura

[3] La questione è lumeggiata in C. B. Boyer, *Storia della matematica* (Mondadori, Milano 1990), p. 450 e seguenti.

chimera"[4], e si sa che niente innervosiva i *philosophes* come le chimere e le altre bestie favolose (le avrebbero sterminate, pur di dimostrare che non esistono). La soluzione proposta da D'Alembert per rimuovere gli infinitesimi prevedeva l'introduzione della nozione di *limite*, che egli però non seppe definire con precisione (sarebbe spettato a Cauchy fornire una definizione di limite pressoché soddisfacente). La proposta che incontrò maggior favore fu invece quella di Lagrange, che introdusse, nel quadro di un complessivo ripensamento dell'analisi matematica finalizzato a perfezionarne il rigore formale, un concetto di *funzione derivata* basato sul celebre teorema di Taylor. Ma qui la nostra digressione deve interrompersi, sia per evitare questioni tecniche un poco spinose, sia perché esattamente in questa fase s'inserisce la riflessione di Marx.

Difatti, il filosofo tedesco (che riempie i suoi taccuini alla fine degli anni Settanta) conosce le opere di D'Alembert e Lagrange, mentre sembra ignorare gli sviluppi più recenti dell'analisi, dovuti ai suoi contemporanei (e connazionali) Dirichlet, Weierstrass, Cantor e Dedekind. Ma forse non è solo la carenza di aggiornamento bibliografico, che peraltro riflette l'ottocentesco divorzio fra filosofia e scienza, a spiegare l'attaccamento di Marx allo "stile" dei matematici illuministi di fine Settecento: si manifestano qui, nei gusti del Marx matematico (buon) dilettante, alcuni dei più caratteristici lineamenti intellettuali e spirituali del Marx filosofo, vale a dire l'avversione alla metafisica classica e la tensione materialistica verso una conoscenza scientifica di carattere inequivocabilmente *operativo*. In molti passaggi illuminanti del testo, è l'autore stesso a dichiarare questa sua "politica": egli condivide le critiche di D'Alembert ai passaggi ambigui con cui i padri fondatori Newton e Leibniz liquidavano la questione degli infinitesimi ("erano troppo presi dal calcolo", annota ironico), ma si spinge oltre, rivelando motivazioni più radicali di quelle dei matematici illuministi, che in fondo cercavano solo una definizione rigorosa degli infinitesimi.

Marx ravvisa negli autori classici una fiducia nella realtà di ciò di cui parlano che si basa su certezze metafisiche, forse di stampo platonico, ovvero sull'assunzione implicita dell'*esistenza* degli enti matematici, che, per il fatto stesso di essere conformi all'intuizione umana, hanno da essere *reali* (in qualche mondo perfetto, verrebbe da dire): per Newton, come per Galilei, le definizioni mediante le quali cerchiamo di cogliere questi enti, più o meno accurate, non sono che punti d'appoggio per le nostre facoltà, ma non influiscono sull'autonoma esistenza di numeri, punti, rette e... infinitesimi (l'incremento infinitesimo "prima esiste e poi viene *spiegato*", è il modo in cui Marx descrive questa implicita gnoseologia). Questa fiducia metafisica è per il materialista dialettico Marx una colpa imperdonabile, se egli si spinge a bollare quella di Newton e Leibniz come una "matematica mistica" (definizione che a orecchie contemporanee, dopo Florenskij per esempio, non suona così pazzesca, ma che per Marx equivale a una condanna senza appello). Egli condivide altresì coi matematici del tardo Settecento l'idea che si debba rifondare il calcolo differenziale usando solo grandezze finite (D'Alembert) e che suo fondamento debba essere un algoritmo di calcolo (Lagrange), vale a dire una *procedura algebrica*, anziché un'*intuizione geometrica* (o peggio una petizione di principio metafisica). Tuttavia, il suo elemento di originalità consiste nell'idea che alla fondazione della nuova matematica debba presiedere la nuova logica, quella dialettica.

Facendo propria questa posizione, Marx si condanna da sé alla marginalità e all'isolamento, a dispetto della profondità della sua intuizione sui difetti del calcolo differenziale classico: difatti, come accennavamo, proprio in quegli anni nelle università

[4] Citato in Boyer, *op. cit.*, p. 521.

tedesche prendeva l'avvio una rivoluzione scientifica di tutt'altro segno, nota come "aritmetizzazione dell'analisi" (il nome allude al trasferimento alla teoria delle funzioni del metodo utilizzato con successo nello studio dei numeri). Weierstrass, in particolare, si fece alfiere di un rinnovamento basato essenzialmente sul linguaggio, i cui pilastri furono l'elaborazione di un sistema simbolico non-equivoco, da sostituire alla insufficientemente rigorosa lingua comune, e sulla riformulazione delle definizioni dell'analisi in termini di questo simbolismo; con questa operazione i matematici tedeschi "estromisero dal calcolo infinitesimale la nozione di variabilità e resero superfluo il consueto, persistente ricorso a quantità infinitesime fisse"[5]. Era l'uovo di Colombo: fu sufficiente riprendere, in forma rigorosa e senza far uso d'altro che dei segni delle operazioni aritmetiche, la vecchia definizione di limite di Cauchy per dotare il calcolo differenziale di uno statuto logico perfettamente coerente e funzionale, che usava solo quantità finite e definiva gli oggetti matematici senza ambiguità di sorta. Naturalmente, in tutto ciò non v'era traccia della dialettica cara al filosofo di Treviri.

Aveva inizio una nuova "età del rigore" in cui la matematica si sarebbe interrogata incessantemente sulla propria consistenza, elaborando sistemi assiomatici via via più raffinati e tendendo inesorabilmente a identificarsi con la logica; un matrimonio celebrato vent'anni dopo da Russell, secondo il quale la matematica è un insieme di proposizioni formate da *costanti logiche* di carattere formale e da variabili, intese come meri simboli svincolati da qualsivoglia relazione con realtà fenomeniche o di altro ordine. Di queste proposizioni, il matematico decide la veridicità solo in termini di *dimostrabilità*, senza mai pronunciarsi su un loro eventuale significato, tanto che Russell può dichiarare che "la matematica *usa* un concetto che non fa parte delle proposizioni che essa considera, vale a dire la nozione di *verità*"[6]. In una simile prospettiva, concepire una variabile matematica come una concreta quantità che subisce delle variazioni, e quindi trattarla in maniera dialettica, appare non solo superfluo ma fuorviante: è come se, imparando le regole degli scacchi, un allievo obiettasse che i veri cavalli non si muovono a "L", e le torri, poi, non si muovono affatto.

Peraltro questo formalismo estremo, il cui simbolo è il grande matematico David Hilbert, nel corso del Ventesimo Secolo si è alquanto mitigato, sia per l'influsso di correnti alternative di pensiero (l'intuizionismo di Brouwer) sia per la "strage delle illusioni" seguita alla pubblicazione dei teoremi di Gödel, che misero in crisi la prospettiva della perfetta coerenza della matematica come sistema linguistico non-ambiguo. Su tutt'altro versante, e in una posizione di isolamento intellettuale anche più radicale dei quella in cui si trovò confinato Marx, lo studioso di tradizioni René Guénon riabilitò addirittura il metodo di Leibniz, definendo gli infinitesimi come dei "nulla relativi", distinti in quanto tali dal "nulla assoluto" rappresentato dallo zero[7]. Riaffiora insomma, nel Novecento, il sospetto che la matematica studi una realtà oggettiva benché intangibile, *servendosi* della logica formale come di uno strumento di cui sono noti in anticipo i difetti, e che lo faccia secondo i dettami di una gnoseologia (e quindi, implicitamente, di una metafisica) più vicina a quella classica che a quella idealistica. Oggi, un importante studioso di analisi come Enrico Giusti può affermare che gli oggetti matematici preesistono alla loro scoperta

[5] Boyer, *op. cit.*, p. 646.
[6] B. Russell, *I principi della matematica* (Newton & Compton, Roma 1997), p. 23.

[7] R. Guénon, *La metafisica del numero* (Arktos, Carmagnola 1990), p. 77.

e rigorosa definizione "non come oggetti, ma come procedure dimostrative efficaci"[8]. Insomma, il "misticismo" o "platonismo" dei matematici (per quanto in versione moderata) è duro a morire, così come il loro attaccamento alla logica classica, al principio del terzo escluso e alla convinzione (assai poco dialettica) che due negazioni affermano.

Il valore dei *Manoscritti matematici*, e della loro edizione curata con pazienza ed erudizione da Ponzio, è forse soprattutto di carattere esemplare: nel mondo di oggi, il baratro che proprio negli anni di Marx separava il sapere scientifico (formalizzato e aritmetizzato) da quello filosofico (idealistico e dialettico) sembra meno profondo; e un confronto fra i due, un'osmosi di idee e metodi provenienti da aree diverse, come quella tentata dall'autore del *Capitale* nei suoi quaderni ricchi di confusione e di genio, sarebbe auspicabile per chiunque condivida l'idea (utopistica?) che in fin dei conti il sapere è uno.

Antonio Iannizzotto (Firenze, 28 giugno 1977) nel 2002 si è laureato in Matematica all'Università di Catania con una tesi intitolata *Metodi di sconnessione per operatori non lineari fra spazi di Banach*, ed è attualmente studente del Dottorato di Ricerca in Matematica presso lo stesso ateneo. I suoi contributi, in diversi settori dell'analisi non lineare e della teoria dei punti critici, quasi tutti scritti in collaborazione con Francesca Faraci oltre che con altri autori, sono apparsi su riviste internazionali quali *Archiv der Mathematik* (Basilea), *Studia Matematica* (Varsavia), *Nonlinear Analysis* (Oxford). Di recente, ha partecipato a congressi sull'analisi matematica a Catania e a Erice.

[8] E. Giusti, *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici* (Bollati Boringhieri, Torino 1999), p. 76.